CHAPITRE 2 : LOIS DU FROTTEMENT SOLIDE

1. CONTACT ENTRE DEUX SOLIDES

1.1. Nature du contact

Le contact entre deux solides peut se faire :
– selon une surface (par exemple, lorsqu'un livre glisse sur une table plane) ;
– selon une ligne (par exemple, lorsqu'un cylindre roule sur un plan);
– en un point (par exemple, lorsqu'une boule est en mouvement sur une table) (fig. 1).

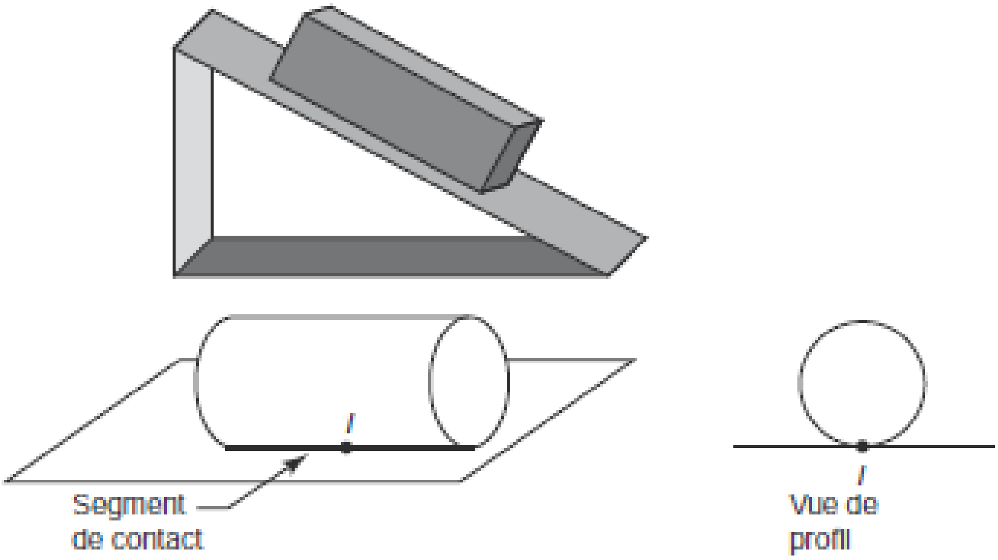
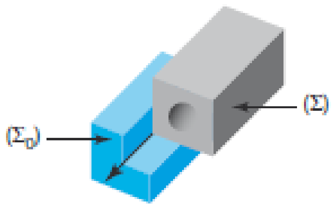
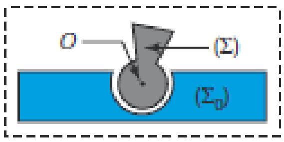
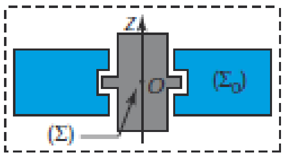


Fig. 1

Les deux derniers cas sont en fait des modèles. Le contact réel se fait toujours selon une surface, de dimensions éventuellement très petites. On se ramènera cependant au cas d'un point de contact pour des systèmes dont on peut étudier la « trace » dans un plan (roue cylindrique).

Sur les schémas précédents, on a représenté des liaisons unilatérales (les solide S_1 et S_2 peuvent se séparer). Dans certains

cas, le mouvement d'un solide par rapport à un autre est limité par d'autres contraintes que celles imposées par un simple contact. On définit ci-dessous les principales liaisons.

Liaison	Représentation	Définition
Liaison **glissière** (ou prismatique)		Le seul mouvement du solide Σ par rapport au solide Σ_0 est un mouvement de **translation rectiligne** parallèlement à un axe lié à Σ_0.
Liaison **rotule**		Le seul mouvement du solide Σ par rapport au solide Σ_0 est un mouvement de **rotation** autour d'un **point** O lié à Σ_0.
Liaison **pivot**		Le seul mouvement du solide Σ par rapport au solide Σ_0 est un mouvement de rotation autour d'un **axe** lié à Σ_0.

Dans certains cas, les deux solides ne peuvent pas se séparer, on parle dans ce cas de liaison bilatérale.

1.2. Vitesse de glissement

Considérons un contact ponctuel. Notons I le point de contact. Il est important de distinguer trois points qui ont des rôles différents, bien qu'ils soient confondus géométriquement :

– le point I de l'espace qui est l'intersection des surfaces des deux solides;

– le point matériel appartenant au solide 1 et coïncidant, à l'instant *t*, avec I ;

– le point matériel appartenant au solide 2 et coïncidant, à l'instant *t*, avec I (fig. 2).

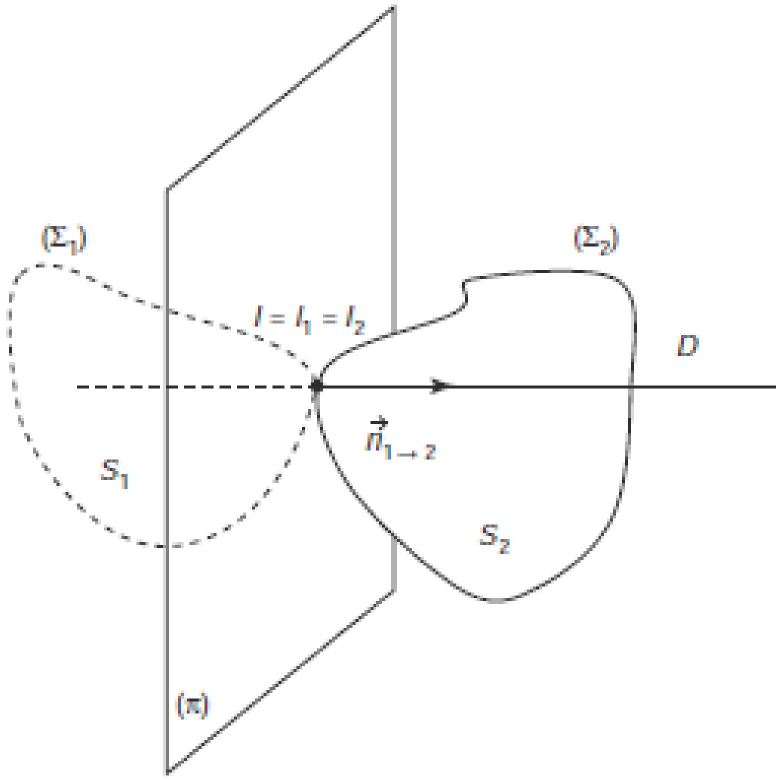


Fig.2

On appelle vitesse de glissement de Σ_2 par rapport à Σ_1 la vitesse relative :

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{g}} = \vec{\mathbf{v}}(\mathbf{I}_2/\mathbf{I}_1) = \vec{\mathbf{v}}\left(\mathbf{I}\epsilon\boldsymbol{\Sigma}_{2/\mathcal{R}}\right) - \vec{v}\left(\mathbf{I}\epsilon\boldsymbol{\Sigma}_{1/\mathcal{R}}\right) = \vec{\mathbf{v}}(\mathbf{I}\epsilon\mathbf{S}_2/\mathcal{R}) - \vec{v}(\mathbf{I}\epsilon\mathbf{S}_1/\mathcal{R})}$$

La vitesse de glissement est indépendante du référentiel d'étude. On peut, en particulier, la déterminer dans un référentiel attaché à l'un des solides.

La vitesse de glissement est nécessairement dans le plan tangent commun aux deux solides. Dans le cas contraire, il y aurait rupture du contact ou interpénétration des solides.

2. LES LOIS DE COULOMB DU FROTTEMENT DE GLISSEMENT DANS LE SEUL CAS D'UN SOLIDE EN TRANSLATION

À la fin du XVIIIe siècle, Charles-Augustin de Coulomb établit expérimentalement des lois permettant de décrire les actions de frottement entre deux solides mais n'ont pas de fondement théorique : il s'agit de lois phénoménologiques.

On décrit ici ces lois, relatives à la résultante des actions de contact,

$$\vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{1}\to\mathbf{2}} = \vec{\mathbf{N}}_{\mathbf{1}\to\mathbf{2}} + \vec{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}\to\mathbf{2}}$$

Le comportement de $\vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{1}\to\mathbf{2}}$ impose de distinguer deux cas, selon que les solides glissent ou ne glissent pas l'un sur l'autre. Cette condition est décrite par la vitesse de glissement.

Dans le cas de notre étude, nous nous intéresserons aux solides en translation c'est-à-dire que tous les points de chacun des solides ont la même vitesse

2.1 La vitesse de glissement est non nulle

Cette hypothèse se traduit par : $\vec{v}(I_2/I_1) \neq \vec{\mathbf{0}}$

Dans ce cas, les lois de Coulomb du glissement stipulent :

$\left\|\vec{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}\to\mathbf{2}}\right\| = \mathbf{f_c}\left\|\vec{\mathbf{N}}_{\mathbf{1}\to\mathbf{2}}\right\|$ et $\vec{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}\to\mathbf{2}}$ est opposé à $\vec{\mathrm{v}}(\mathrm{I}_2/\mathrm{I}_1)$

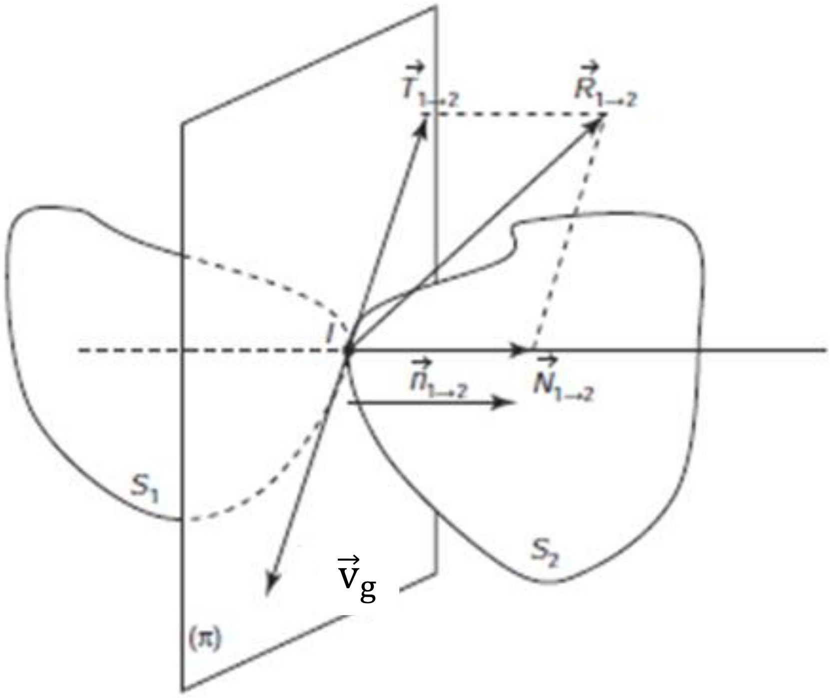


Fig.3

Définition : f_c est le **coefficient de frottement cinétique** (ou dynamique)

Propriétés :

– f_c est un nombre sans dimension ;

– f_c dépend de la nature et de l'état des surfaces en contact. Dans la plupart des cas, le coefficient f_c est de l'ordre de 0,3 à 0,7.

2.2. La vitesse de glissement est nulle

La vitesse de glissement est nulle $\vec{v}(I_2/I_1) = \vec{0}$, les deux solides roulent sans glisser l'un sur l'autre. On dit qu'il y a adhérence entre les solides.

Dans ce cas, la loi de Coulomb du non glissement stipule :

$$\boxed{\left\|\vec{T}_{1\to2}\right\| \leq f_s\left\|\vec{N}_{1\to2}\right\|}$$

Définition : f_s est le **coefficient de frottement statique**.

Tout comme f_c, ce coefficient est sans dimension et dépend fortement de la nature et de l'état des surfaces en contact.

Cette inéquation est la condition du non-glissement.

Exemple :

Matériaux en contact	Coefficient statique f_s	Coefficient cinétique f_C
Acier sur acier	0,6	0,4
Acier sur bois	0,2 à 0,6	
Pneu sur pavage sec	0,9	0,8
Pneus usés sur pavage humide	0,1 à 0,2	0,05 à 0,12
Caoutchouc sur acier	0,40	0,30
Aluminium sur acier	0,61	0,47
Aluminium sur aluminium	1,1	
Bois sur bois	0,25 à 0,50	

On a toujours $\boldsymbol{f_c \leq f_s}$

Une approximation courante consiste à prendre $f_c = f_s$.

On ne distingue alors pas les deux coefficients statique et cinétique. Par la suite, on notera *f* leur valeur commune.

2.3. Cône de frottement

On se place dans l'approximation $f_c = f_s = f$.

Une représentation géométrique particulièrement intéressante est celle définissant le cône de révolution autour de la normale $\vec{n}_{1\to 2}$ et dont le demi angle au sommet α est donné par : tan α= f.

Les lois de Coulomb ont alors une interprétation géométrique :

– s'il y a glissement, le vecteur $\vec{R}_{1\to2}$ est sur une génératrice du cône (fig. 4a) ;

– s'il n'y a pas de glissement, le vecteur $\vec{R}_{1\to2}$ est à l'intérieur du cône (fig. 4b).

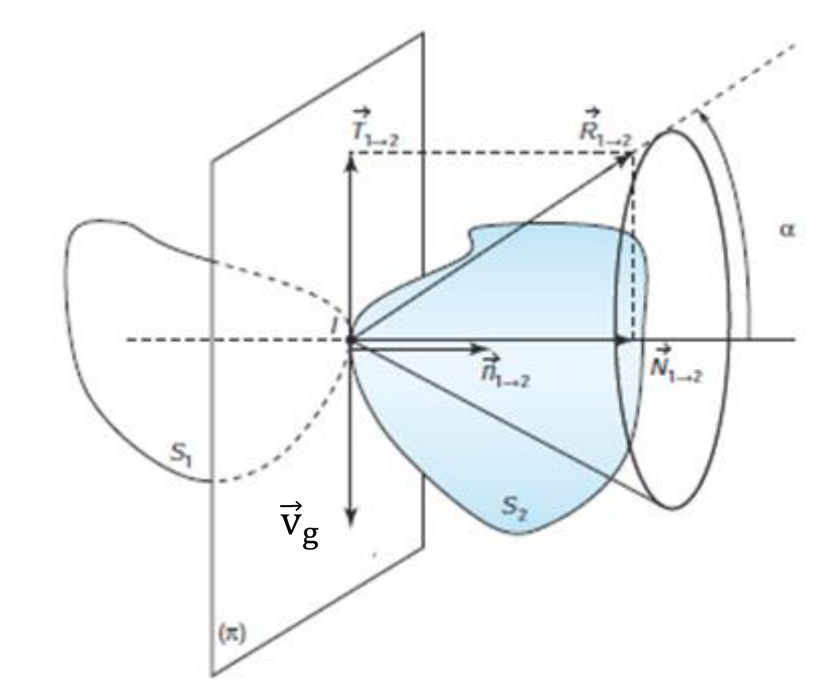


Fig.4a

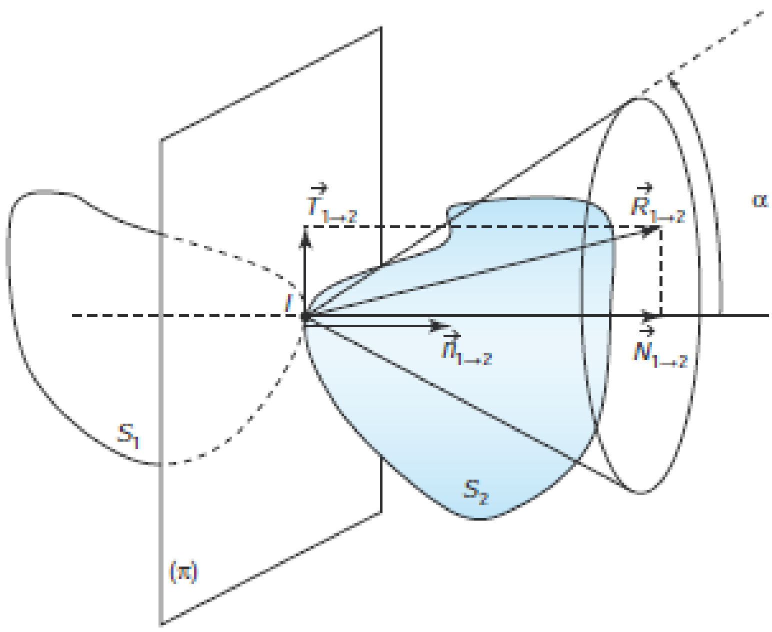


Fig.4b

3. PUISSANCE DES ACTIONS DE CONTACT

3.1. Expression de la puissance

Exprimons tout d'abord la puissance des actions de contact sur chacun des deux solides.

- S_2 subit une force de résultante $\vec{\mathbf{R}}_{1\to 2}$ au point *I*, de vitesse $\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{I} \in \mathbf{S_2})$ dans le référentiel d'étude $(\mathcal{R})$.

La puissance $\mathbf{P_2}$ de cette force sur $\mathbf{S_2}$ est $\mathbf{P_2} = \vec{\mathbf{R}}_{1\to 2}.\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{I} \in \mathbf{S_2})$

- S_1 subit une force $\vec{\mathbf{R}}_{2\to 1}$ au point I, de vitesse $\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{I} \in \mathbf{S_1})$ dans le référentiel d'étude $(\mathcal{R})$.

La puissance $\mathbf{P_1}$ de cette force sur est $\mathbf{P_1} = \vec{\mathbf{R}}_{2\to 1}.\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{I} \in \mathbf{S_1})$

La puissance des actions de contact sur le système de deux solides vaut alors : $\mathbf{P} = \mathbf{P_1} + \mathbf{P_2} = \vec{\mathbf{R}}_{2\to 1}.\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{I} \in \mathbf{S_1}) + \vec{\mathbf{R}}_{1\to 2}.\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{I} \in \mathbf{S_2})$

Le principe des actions réciproques implique que $\vec{\mathbf{R}}_{2\to 1} = -\vec{\mathbf{R}}_{1\to 2}$ et donc que : $\mathbf{P} = -\vec{\mathbf{R}}_{1\to 2}.\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{I} \in \mathbf{S_1}) + \vec{\mathbf{R}}_{1\to 2}.\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{I} \in \mathbf{S_2})$

$$\mathbf{P} = \vec{\mathbf{R}}_{1\to 2}.[\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{I} \in \mathbf{S_2}) - \vec{\mathbf{v}}(\mathbf{I} \in \mathbf{S_1})] = \vec{\mathbf{R}}_{1\to 2}.\vec{v}_g$$

Or, nous savons que : $\vec{\mathbf{R}}_{1\to 2} = \vec{\mathbf{N}}_{1\to 2} + \vec{\mathbf{T}}_{1\to 2}$, Par conséquent,

$$\mathbf{P} = \vec{\mathbf{R}}_{1\to 2}.\vec{v}_g = \left(\vec{\mathbf{N}}_{1\to 2} + \vec{\mathbf{T}}_{1\to 2}\right).\vec{v}_g = \vec{\mathbf{N}}_{1\to 2}.\vec{v}_g + \vec{\mathbf{T}}_{1\to 2}.\vec{v}_g$$

$$\boxed{\mathbf{P} = \vec{\mathbf{T}}_{1\to 2}.\vec{v}_g}$$

car la vitesse de glissement $\vec{v}_g$ ***est orthogonale*** à $\vec{\mathbf{N}}_{1\to 2}$

Dans le modèle du contact ponctuel, seul la force de frottement $\vec{\mathbf{T}}_{1\to 2}$ a une puissance non nulle.

Propriétés :

– Lorsqu'elle est non nulle, la puissance des forces de frottement est dissipative : $\mathbf{P} = \vec{\mathbf{T}}_{1\to 2}.\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{g}} \leq \mathbf{0}$

– La puissance des actions de contact est indépendante du référentiel.

3.2. Cas où la puissance est nulle

Il existe deux cas particuliers importants où la puissance des actions de contact est nulle :

- La vitesse de glissement est nulle, les solides roulent l'un sur l'autre sans glisser : $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{g}} = \vec{\mathbf{0}}$: (statique / roulement sans glissement / pivotement).
- La force de frottement est nulle :

  $\vec{\mathbf{T}}_{\mathbf{1\to 2}} = \vec{\mathbf{0}}$: mouvement sans frottement

Les deux cas précédents sont en général antagonistes car un mouvement de roulement sans glissement n'est possible que s'il existe des forces de frottement (il est difficile de rouler sur la glace sans patiner).

4. METHODE DE RESOLUTION D'UN PROBLEME AVEC FROTTEMENT SOLIDE

On donne tout d'abord le canevas général :

• **Formulation** : on fait une hypothèse relative au mouvement du solide qui peut être soit le non glissement soit un glissement dans une direction et un sens précis.

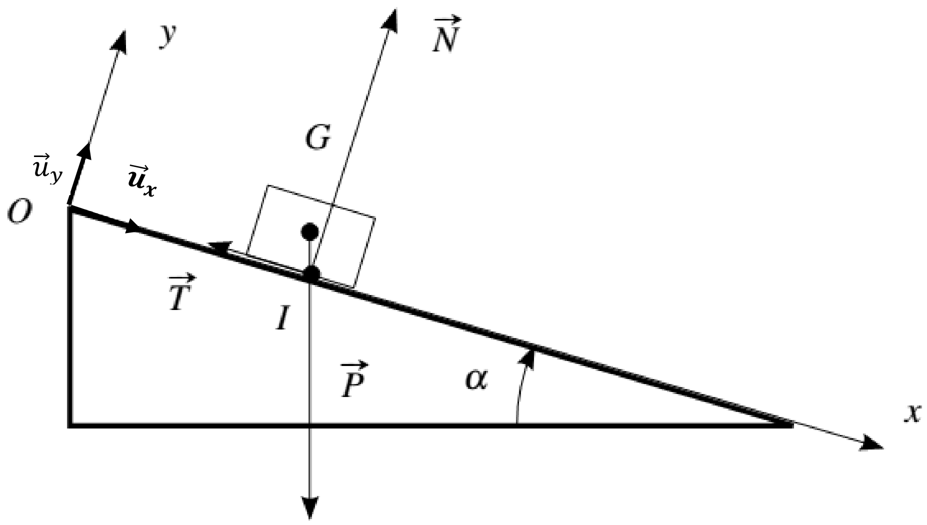
• **Exploitation** : on traduit mathématiquement, compte tenu du paramétrage du problème, les conséquences de l'hypothèse.

• **Résolution** : on résout le problème posé dans le cadre de l'hypothèse. En fin de résolution on calcule, si cela n'a pas encore été fait, toutes les grandeurs qui interviennent dans les conditions à vérifier.

• **Validation** : on impose aux grandeurs calculées de vérifier les conditions de validité de l'hypothèse. On trouve ainsi la plage de valeur des paramètres pour lesquels cette hypothèse est la bonne. Il se peut que ces conditions soient impossibles, ce qui signifie que l'hypothèse choisie était mauvaise. Il arrive aussi qu'elles soient vérifiées mais uniquement jusqu'à un certain instant ; dans ce cas il faut formuler une nouvelle hypothèse pour la suite du mouvement et reprendre la démarche d'hypothèse-validation.

• **Conclusion** : on tire une conclusion claire concernant l'hypothèse.

4.1. Mise en équation générale



Pour simplifier on ne fait pas de différence entre les coefficients de frottement statique et dynamique que l'on note tous les deux f .

Le solide est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction du plan incliné :

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au solide s'écrit :

$$m\vec{a}(G) = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} \quad \Longrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = mgsin\alpha - T & (1) \\ 0 = -mgcos\alpha + N & (2) \end{cases}$$

On a trois inconnues (x, T, N) et deux équations

4.2. Premier cas, le solide est posé sans vitesse initiale

4.2.1. Hypothèse de non glissement

• **Formulation** : on fait l'hypothèse que le solide ne glisse pas ; le plan incliné étant fixe il est donc immobile.

• **Exploitation** : dans ce cas $\dot{x}$ = 0 et $\ddot{x}$ = 0.

• **Résolution** : avec les équations (1) et (2) on trouve :

T = mg sinα et N = mg cos α .

• **Validation** : La condition $\|\vec{T}\| \leq f_s\|\vec{N}\| \quad \Longrightarrow |mgsin\alpha| \leq f|mgcos\alpha|$, soit $tan\alpha \leq f \;\; ou\ encore\ \alpha \leq \alpha_l = arctanf$

• **Conclusion** : si $\alpha \leq \alpha_l$, alors le solide posé sans vitesse initiale ne se mettra pas en mouvement.

De plus la mesure de α_l, angle maximum pour lequel le solide est immobile donne accès au coefficient de frottement puisque : $f = tan\alpha_l$.

4.2.1. Hypothèse de glissement vers le bas

• **Formulation** : on fait l'hypothèse que le solide glisse vers le bas.
• **Exploitation** : la vitesse de glissement étant par hypothèse dans la direction et le sens de $\vec{u}_x$, la composante tangentielle de l'action de contact $\vec{T}$ est dans le sens de $-\vec{u}_x$. $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$.
• **Résolution** : l'équation (2) donne N = mg cosα, on en déduit
T = f mg cosα ; en reportant dans l'équation (1) on trouve alors :
$\ddot{x} = g(sin\alpha - fcos\alpha)$; enfin en intégrant avec une vitesse initiale nulle, on trouve : $\dot{x} = g(sin\alpha - fcos\alpha)t$.
• **Validation** : il faut vérifier que la vitesse de glissement est bien vers le bas, or $\vec{V}_{g2/1} = \dot{x}\vec{u}_x = g(sin\alpha - fcos\alpha)t\vec{u}_x$, il faut donc que :
$sin\alpha - fcos\alpha > 0 \;\; soit\ tan\alpha > f$ soit encore : $\alpha > \alpha_l = arctanf$
• **Conclusion** : si $\alpha > \alpha_l$, le solide posé sans vitesse initiale se met à glisser vers le bas.

4.3. Deuxième cas, le solide est lancé vers le haut avec une vitesse initiale V_0

$$m\vec{a}(G) = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{x} = mgsin\alpha + T & (1) \\ 0 = -mgcos\alpha + N & (2) \end{cases}$$

• **Formulation** : le solide commence par glisser vers le haut.
• **Exploitation** : la vitesse de glissement étant dans la direction et le sens de $-\vec{u}_x$, la composante tangentielle de l'action de contact $\vec{T}$ est dans le sens de $\vec{u}_x$: |T | = f |N|
• **Résolution** : l'équation (2) donne N = mg cos α , on en déduit
T = f mg cosα ; en reportant dans l'équation (1) on trouve alors :
$\ddot{x} = g(sin\alpha + fcos\alpha)$; enfin en intégrant avec une vitesse initiale $-V_0\vec{u}_x$, on trouve : $\dot{x} = g(sin\alpha + fcos\alpha)t - V_0$.
• **Validation** : il faut vérifier que la vitesse de glissement $\vec{V}_{g2/1} = \dot{x}\vec{u}_x$ est bien vers le haut, soit que $g(sin\alpha + fcos\alpha)t - V_0 < 0$ ce qui est le cas tant que : $t < t_1 = \frac{V_0}{g(sin\alpha + fcos\alpha)}$.
• **Conclusion** : pour t < t_1, le solide glisse vers le haut.
Pour t > t_1, il est inutile de poursuivre l'étude. En effet, la situation à l'instant t_1 est exactement la situation à l'instant initial dans la premier cas : solide posé sans vitesse sur le plan. On peut donc affirmer que si α ≤ arctan*f* , le solide va rester immobile et si α > *arctan f* , le solide va redescendre.

4.. Conclusion

L'étude d'un mouvement avec contact de solides fait intervenir notamment les forces de contact comme inconnues. Pour résoudre le problème, il faut écrire :

- Les équations découlant du principe fondamental des systèmes.
- Une relation supplémentaire provenant d'une hypothèse sur l'existence ou non d'un glissement, hypothèse qui devra être vérifiée.

❖ Si l'on suppose qu'il y a glissement, la relation supplémentaire est alors donnée par la loi de Coulomb :

$$\vec{T} \,//\, \vec{v}_g \;\; et\, \vec{T}\,.\vec{v}_g \; < 0 \qquad \|\vec{T}\| = f_c\|\vec{N}\|$$

Il faut ensuite vérifier que $\vec{v}_g$ est bien non nulle et de sens opposé à $\vec{T}$

❖ Si l'on suppose qu'il n'y a pas glissement, la relation supplémentaire est $\vec{v}_g = \vec{0}$ est et il faut alors vérifier que $\|\vec{T}\| < f_c\|\vec{N}\|$.

Enfin, si le mouvement comporte différentes phases successives de natures différentes (avec et sans glissement), la vérification de l'hypothèse choisie permet de déterminer l'instant de changement de phase.